

ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire
MPSI, session 2010

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 Donner le nombre de diviseurs strictement positifs de 2010.

Solution On décompose 2010 en facteurs premiers :

$$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67.$$

Un diviseur strictement positif de 2010 est de la forme

$$2^{\varepsilon_0} \times 3^{\varepsilon_1} \times 5^{\varepsilon_2} \times (67)^{\varepsilon_3}$$

où les ε_i valent 0 ou 1. Il y a donc 2^4 possibilités, soit 16 diviseurs de 2010.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt[3]{5}$ est un nombre irrationnel.

Solution Supposons par l'absurde que $\sqrt[3]{5}$ est rationnel; on peut donc écrire $\sqrt[3]{5} = \frac{p}{q}$, écriture irréductible, c'est-à-dire que $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Alors $\text{pgcd}(p^3, q^3) = 1$, donc l'égalité

$$\frac{5}{1} = \frac{p^3}{q^3}$$

donne deux formes irréductibles du même rationnel. Par l'unicité de la forme irréductible, $p^3 = 5$ (et $q^3 = 1$). Ceci est manifestement impossible.

Exercice 3 Soit x et y des réels tels que $0 < x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Montrer que

$$\frac{\sin y}{\sin x} \leq \frac{y}{x}.$$

Solution L'inégalité à montrer équivaut à l'inégalité

$$\frac{\sin y}{y} \leq \frac{\sin x}{x}.$$

Il suffit donc de montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
On a

$$\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = \frac{N(t)}{t^2}.$$

Étudions le signe de N . On a

$$N'(t) = -t \sin t \leq 0.$$

Donc N décroît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $N(t) \leq N(0) = 0$. Donc φ décroît.

Exercice 4 Soit ABC un triangle non aplati du plan. On note I le point d'intersection des bissectrices intérieures issues de B et C , et J le point d'intersection des bissectrices extérieures issues de B et C .

On note I' le projeté orthogonal de I sur (BC) et J' le projeté orthogonal de J sur (BC) .

Montrer que le milieu de $I'J'$ est égal au milieu de BC .

Solution Comme deux bissectrices du même angle sont perpendiculaires, le quadrilatère $IBJC$ est inscriptible. Le centre O de son cercle circonscrit est le milieu de $[IJ]$. Son projeté orthogonal est donc le milieu de $[I'J']$ car une projection orthogonale conserve le milieu. Ce centre est aussi sur la médiatrice de $[BC]$. Son projeté orthogonal sur (BC) est donc le milieu de $[BC]$. Ces deux milieux coïncident donc.

Exercice 5 Soit X un ensemble à n éléments. Donner le nombre de couples (A, B) de parties de X telles que $A \subset B$.

Solution Fixons A de cardinal k : il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de A . La donnée d'une partie B contenant A est déterminée par une partie du complémentaire de A , ensemble à $n - k$ éléments. Il y a donc 2^{n-k} possibilités pour B . Au total, il y a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$$

couples (A, B) .

Exercice 6 On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $]0, 1[$. On note x_n cette racine.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Solution a. La fonction f_n est dérivable, de dérivée donnée par

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0 \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Elle est donc strictement croissante sur $[0, 1]$. En outre, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Elle s'annule donc exactement une fois sur l'intervalle $]0, 1[$.

b. Pour montrer que $x_n \leq x_{n+1}$, il suffit de montrer que $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, car f_{n+1} est strictement croissante. Or

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) \leq 0.$$

Exercice 7 Un groupe de personnes est soumis à un test virologique. On suppose que la probabilité pour que le test soit positif dans le cas d'une contamination par le virus est de 99%. On suppose que la probabilité de fausse alerte, c'est-à-dire que le test soit positif en l'absence de contamination, est de 5%. La fréquence d'infection du groupe est de 0,01%. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée ? On donnera le résultat numérique avec une seule décimale.

Solution

On note p l'événement « le test est positif » et s l'événement « le patient est infecté ». On note \bar{s} l'événement contraire de s et $P(p \mid s)$ la probabilité conditionnelle de p sachant s . Par hypothèse, $P(p \mid s) = 0,99$ et $P(p \mid \bar{s}) = 0,05$. Donc

$$P(p \cap s) = P(p \mid s)P(s) = 0,99 \cdot 10^{-4} \text{ et } P(p \cap \bar{s}) = 0,05(1 - 10^{-4}).$$

Par conséquent,

$$P(p) = 0,99 \cdot 10^{-4} + 0,05(1 - 10^{-4})$$

et finalement

$$\begin{aligned} P(s \mid p) &= \frac{P(s \cap p)}{P(p)} = \frac{0,99 \cdot 10^{-4}}{0,99 \cdot 10^{-4} + 0,05(1 - 10^{-4})} \\ &= \frac{0,99}{0,99 + 0,05 \times 9999} \approx \frac{1}{500} = 0,002. \end{aligned}$$

La probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée est d'environ 0,2%.

Exercice 8 Donner une primitive de $\frac{x^3}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution

Posons $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Alors $P(x) - P'(x) = \frac{x^3}{6}$ et donc

$$\frac{x^3}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}} = \frac{6(P(x) - P'(x))}{P(x)} = 6 - 6\frac{P'(x)}{P(x)}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{x^3}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}} dx = 6x - 6 \ln P(x).$$

Exercice 9 On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et l'on définit par récurrence la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ grâce à la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- a. Montrer soigneusement que, pour tout $n \geq 0$, F_n est un entier.
- b. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, F_{3k} est un entier pair.
- c. Montrer que, si $m \in \mathbb{N}^*$ et si m divise n , alors F_m divise F_n .

Solution a. On raisonne par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que n est un entier supérieur ou égal à 1 tel que, pour tout $k \leq n$, $F_k \in \mathbb{Z}$. Alors $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \in \mathbb{Z}$ et le résultat est vrai au rang $n+1$.

b. Énonçons la propriété \mathcal{P}_n : pour tout $k \leq n$ on a

$$F_{3k} \equiv 0, F_{3k+1} \equiv 1, F_{3k+2} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Montrons que \mathcal{P}_n est vraie par récurrence sur n . On a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$, ce qui montre que \mathcal{P}_0 est vraie. Supposons \mathcal{P}_n vraie. Alors

$$\begin{aligned} F_{3n+3} &= F_{3n+2} + F_{3n+1} \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}, \\ F_{3n+4} &= F_{3n+3} + F_{3n+2} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{2}, \\ F_{3n+5} &= F_{3n+4} + F_{3n+3} \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Cela montre \mathcal{P}_{n+1} et clôt la récurrence.

c. On note $\bar{x} = \bar{y}$ pour signifier que $x \equiv y \pmod{F_m}$.

Montrons par exemple que F_m divise F_{2m} . Posons $G_k = F_{k+m}$. On a pour tout k

$$G_{k+2} = G_{k+1} + G_k, \text{ donc } \overline{G_{k+2}} = \overline{G_{k+1}} + \overline{G_k}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{F_{k+2}} = \overline{F_{k+1}} + \overline{F_k}.$$

De plus, $\overline{G_0} = \overline{F_0} = \overline{0}$ et $\overline{G_1} = a\overline{F_1}$ si $a = G_1$. Comme les deux suites $(\overline{F_k})$ et $(\overline{G_k})$ satisfont la même relation de récurrence linéaire d'ordre deux avec des conditions initiales proportionnelles, on vérifie aisément qu'elles sont elles-mêmes proportionnelles. Donc $\overline{G_k} = a\overline{F_k}$ et en particulier

$$\overline{G_m} = \overline{F_{2m}} = a\overline{F_m} = \overline{0}.$$

Donc F_m divise F_{2m} . Plus généralement, si par récurrence F_m divise F_{pm} , on obtient que

$$\overline{G_{pm}} = \overline{F_{(p+1)m}} = a\overline{F_{pm}} = \overline{0}$$

ce qui clôt la récurrence.

Exercice 10 Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que $x^3 - y^3 = 19$.

Solution L'équation entraîne que $x > y$ et s'écrit

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 19.$$

• Premier cas : $x - y = 1$.

Alors $x^2 + xy + y^2 = 19$, soit

$$3y^2 + 3y - 18 = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont $y = 2$ et $y = -3$, conduisant aux couples $(3, 2)$ et $(-2, -3)$, qui conviennent.

• Second cas : $x - y = 19$.

Alors $x^2 + xy + y^2 = 1$, donc $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$, ce qui entraîne que, ou bien $y = 0$ et $x^2 = 1$, impossible, ou bien $y^2 = 1$ et $x = -\frac{1}{2}y$, impossible aussi.

Finalement, il y a les deux couples $(3, 2)$ et $(-2, -3)$ pour solutions.

Exercice 11 Soit r un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $f_n(t) = \frac{(r^2 - t^2)^n}{2^n n!}$ et $I_n = \int_0^r f_n(t) \cos t \, dt$. Ainsi, $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \frac{r^2 - t^2}{2}$.

a. Calculer I_0 et I_1 .

b. Montrer que, pour $n \geq 2$, $f_n''(t) = -(2n - 1)f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t)$.

c. En déduire que $I_n = (2n - 1)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}$.

d. Dans cette question, on suppose par l'absurde qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $I_n = 0$. Aboutir à une contradiction à l'aide des questions a et c.

On suppose dans la suite de cet exercice que r est un rationnel que l'on écrit $r = \frac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels.

e. Montrer que, si $A > 0$, alors $\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0$. En déduire que $b^n I_n \rightarrow 0$.

f. Montrer qu'il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos r + v_n \sin r$.

g. On suppose par l'absurde que $\tan r$ est rationnel, et qu'il s'écrit donc $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers. Vérifier que $b^n q \frac{I_n}{\cos^n r} \in \mathbb{Z}$. En déduire une contradiction.

h. Montrer que π est irrationnel.

Solution a. On a successivement

$$I_0 = \int_0^r \cos t \, dt = \sin r$$

et, grâce à des intégrations par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^r \frac{r^2 - t^2}{2} \cos t \, dt = \left[\frac{r^2 - t^2}{2} \sin t \right]_0^r + \int_0^r t \sin t \, dt \\ &= [-t \cos t]_0^r + \int_0^r \cos t \, dt = -r \cos r + \sin r. \end{aligned}$$

b. On calcule

$$f'_n(t) = -2tn \frac{(r^2 - t^2)^{n-1}}{2^n n!} = -\frac{t(r^2 - t^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

et

$$\begin{aligned} f''_n(t) &= -\frac{(r^2 - t^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} + \frac{t^2}{2^{n-2}(n-2)!} (r^2 - t^2)^{n-2} \\ &= -f_{n-1}(t) + (t^2 - r^2 + r^2) \frac{(r^2 - t^2)^{n-2}}{2^{n-2}(n-2)!} \\ &= -f_{n-1}(t) - \frac{(r^2 - t^2)^{n-1}}{2^{n-2}(n-2)!} + r^2 f_{n-2}(t) \\ &= -f_{n-1}(t) - 2(n-1)f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t) \\ &= -(2n-1)f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t). \end{aligned}$$

c. Grâce à une intégration par parties, en remarquant que $f_n(r) = f'_n(r) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^r f''_n(t) \cos t \, dt &= [\cos t f'_n(t)]_0^r + \int_0^r f'_n(t) \sin t \, dt \\ &= [f_n(t) \sin t]_0^r - \int_0^r f_n(t) \cos t \, dt = -I_n. \end{aligned}$$

Donc

$$I_n = - \int_0^r f''_n(t) \cos t \, dt = (2n-1)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}$$

grâce à la question **b**.

d. Si la suite (I_n) est nulle à partir de l'indice N , on obtient grâce à **c** et par récurrence descendante que $I_0 = 0$, ce qui est une contradiction.

e. Posons $u_n = \frac{A^n}{n!}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pour $n \geq N$. Il en résulte par récurrence que, pour $p \geq 0$,

$$u_{N+p} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p u_N,$$

donc que $u_n \rightarrow 0$.

On dispose alors de l'encadrement

$$0 \leq b^n I_n \leq \frac{b^n}{2^n n!} \int_0^r r^{2n} = r \frac{A^n}{n!}$$

avec $A = \frac{br}{2}$. Donc $b^n I_n \rightarrow 0$.

f. Montrons par récurrence que, pour tout $k \leq n$, $b^k I_k = u_k \cos r + v_k \sin r$ avec u_k et v_k entiers relatifs. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$ d'après **a**. Supposons cela vrai au rang $n - 1$. Alors

$$\begin{aligned} b^n I_n &= (2n - 1)b^n I_{n-1} - b^n r^2 I_{n-2} \\ &= (2n - 1)b(u_{n-1} \cos r + v_{n-1} \sin r) - a^2(u_{n-2} \cos r + v_{n-2} \sin r), \end{aligned}$$

soit

$$b^n I_n = ((2n - 1)bu_{n-1} - a^2 u_{n-2}) \cos r + ((2n - 1)bv_{n-1} - a^2 v_{n-2}) \sin r.$$

g. On a

$$\frac{b^n I_n q}{\cos r} = qu_n + qv_n \tan r$$

qui est bien un entier relatif. Cette suite d'entiers tend vers 0 d'après **e**. Elle est donc ultimement nulle, ce qui contredit **d**. C'est la contradiction cherchée.

h. Si π était rationnel, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ serait irrationnel d'après ce qui précède.